

# Magnetooptische Effekte bei inkohärenter Vielfachreflexion - Teil I: Iterationsverfahren -

Keßler, Franz Rudolf

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 43, 1992,  
S.55-76



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

# Magnetooptische Effekte bei inkohärenter Vielfachreflexion

## – Teil I: Iterationsverfahren –

Von **Franz Rudolf Keßler\***, Braunschweig

(Eingegangen am 15. 5. 1992)

### Kurzfassung:

Bei existierender Vielfachreflexion in einer Planplatte sind die außen meßbaren magnetooptischen („*mo*“)-Effekte, – das sind in Transmissionsrichtung der „Faraday-Effekt“ und in Reflexionsrichtung der „*mo*-Kerr-Effekt“ –, entstanden aus in der Probe vielfachreflektierten Wellenanteilen. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Problemkreis der inkohärenten Überlagerung von vielfachreflektierten Intensitätsanteilen, der – im Gegensatz zum Fall der kohärenten Vielfachreflexion – noch nicht mit Hilfe eines entsprechenden Matrizenkalküls dargestellt werden konnte. Für den Fall einer Planplatte bei senkrechter Inzidenz wird ein Berechnungsverfahren angegeben, bei dem die Strahlanteile einzeln verfolgt und der Intensität nach überlagert werden, so daß sich die „Meßwertanzeige“ bei der Analyse der detektierten Strahlung durch einen Analysator als Funktion seiner Winkelstellung ergibt. Die Auswertung im Sinne der Angabe des komplexen Faraday- bzw. Kerr-Effektes in ihrer „summarischen“ Definition erfolgt danach analytisch.

Eine Beispieldiskussion bringt einen numerischen Vergleich der Ergebnisse für die *mo*-Effekte bei kohärenter und inkohärenter Vielfachreflexion. Danach ist festzustellen, daß die inkohärente Superposition der vielfachreflektierten Strahlanteile nicht zu einer Art „Mittelwert“ der *mo*-Effekte bei kohärenter Superposition führt. Vielmehr treten u.U. massive „Verfremdungen“ auf. – Auf die Meßmethode des (summarischen) Faraday- und Kerr-Effektes mit Hilfe der Polarisationsmodulation zwischen rechts- und linkszirkularer Eigenmode der Strahlung, die prinzipiell ein ganz anderes Meßresultat liefert, wird hingewiesen.

### Abstract:

The primary magnetooptical („*mo*“) effects are the Faraday-effect and the *mo* Kerr-effect. In both cases the polarisation status of light is modified from a starting linear polarisation into an elliptic one including a rotation of the main axis of the ellipses. In the classical notation, the Faraday-effect in its definition is a pure volume effect and the *mo* Kerr-effect is defined as a interface effect in reflection. But corresponding to the boundary conditions of electromagnetic waves, we also have a *mo* Kerr-effect in transmission at the interface between two media having different complex *mo* refraction indices.

---

\* Prof. em. Dr. F.R. Keßler · Inst. für Halbleiterphysik und Optik der T.U. Braunschweig · Schleinitzstraße 20 · 3300 Braunschweig

The paper is concerned with the problem of superimposition of *mo* influences if multireflection of light is present in a planparallel sample at normal incidence. In contrast to the problem of coherent superposition of the electromagnetic fields of multireflected beams, the paper is concerned with the problem of incoherent beam superimposition. The paper leads to the observable results of *mo* transmission and reflection effects respectively, by means of an iterative addition of the relevant radiation flux densities of the multireflected beams. The relevant radiation flux densities are the intensity components with respect to the orientation of the analyser.

With respect to the integral measuring results of the *mo* effects in transmission and reflection, a main point of the discussion is to state that the *mo* polarisation modification in the case of incoherent multireflection is not to be understood as a sort of mean value of the *mo* spectra in the case of coherent superposition of multireflected beams. In contrast, in the incoherent case we find an "alienation" of the *mo* spectra possibly leading to a misinterpretation of the involved microphysical processes.

The numerical results of two examples are presented. In each case the spectra of coherent as well as incoherent beam superposition are given for comparison.

The final discussion contents the remark, that the method of polarisation modulation between the right and left circular polarisation mode leads to different *mo* results in comparison with the measurements using a rotating analyser if incoherent multireflection is present. Therefore different definitions of the resulting *mo* effects must be observed.

The presented method of iteration is useful for calculating the expected experimental results based on models as well as to analyse the measurements by variation of the parameters using an appropriate procedure.

## Einleitung

Geht elektromagnetische Strahlung („Licht“) durch Materie, die in Ausbreitungsrichtung des Lichtes einem Magnetfeld ausgesetzt ist, so zeigt sich der Polarisationszustand der elektromagnetischen Welle verändert: Linear polarisiertes Licht erfährt nicht nur eine Drehung der Schwingungsrichtung, sondern wird im allgemeinen dabei zu einem elliptischen Polarisationszustand verändert. Ursache ist die Verschiedenheit der komplexen Brechungsindizes für die rechts- und linkszirkuläre Eigenmode der Welle.

Bei existierender Vielfachreflexion in einer Planplatte sind die außen meßbaren magnetooptischen („*mo*“)-Effekte, das sind in Transmissionsrichtung der „Faraday-Effekt“ und in Reflexionsrichtung der „*mo*-Kerr-Effekt“, entstanden aus in der Probe vielfachreflektierten Wellenanteilen. Insofern sind in den beiden genannten polarisationsoptischen Erscheinungen jeweils Volumeneffekte in Transmission, d. h. der eigentliche Faraday-Effekt, und Grenzflächeneffekte in Transmission und Reflexion, letzteres ist der eigentliche *mo*-Kerr-Effekt in der üblichen Bezeichnung, in Überlagerung enthalten. Die kohärente(!) Überlagerung aller Wellenanteile ist an anderer Stelle abschließend behandelt.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Problemkreis der inkohärenten Überlagerung von vielfachreflektierten Intensitätsanteilen, der bisher – soweit bekannt – noch nicht mit Hilfe eines entsprechenden Matrizenkalküls dargestellt werden konnte. Im vorliegenden Fall wird für den Fall einer Planplatte bei senkrechter Inzidenz ein Berechnungsverfahren angegeben, bei dem die Strahlanteile einzeln verfolgt und der Intensität nach überlagert werden. Die numerische Verfolgung der Einzelschritte der Hin- und Her-Reflexion (bezeichnet als „Iterationsverfahren“) wird abgebrochen, wenn die Intensität eines Teilstrahles ein vorgegebenes Maß unterschreitet. Entsprechend einer diesbezüglichen Vorgabe lassen sich beliebig kleine Restfehler erreichen, die in jedem Fall so gewählt werden können, daß sie die Meßfehler im Experiment deutlich unterschreiten. Insofern ist die Rechnung hinreichend genau.

Innerhalb der Rechnung wird ein Rekursionsverfahren zur Darstellung der Meßfunktion der Intensität in Abhängigkeit der Analysatorwinkelstellung angegeben, so daß die Superposition der Flußanteile bei der Vielfachreflexion absolut korrekt ist. Die Auswertung der Intensitätsüberlagerung in Richtung der Berechnung des Drehwinkels und der Elliptizität im Sinne der Angabe des komplexen Faraday- bzw. Kerr-Effektes in ihrer „summarischen“ Definition (vgl. oben) kann ebenso analytisch erfolgen.

Eine abschließende Diskussion bringt einen Vergleich der Ergebnisse für die *mo*-Effekte bei kohärenter und inkohärenter Vielfachreflexion am Beispiel von spektralen Abhängigkeiten der *mo*-Effekte a) bei spektral konstantem und b) bei resonanzartiger Abhängigkeit der komplexen *mo*-Brechungsindizes für die rechts- und links-zirkular polarisierte Lichtmode als den beiden *mo*-Eigenmoden in der Probe.

Danach ist festzustellen, daß die inkohärente Superposition der vielfachreflektierten Strahlanteile nicht zu einer Art „Mittelwert“ der *mo*-Effekte bei kohärenter Superposition führt. Vielmehr treten u. U. massive Veränderungen in Bezug auf den resultierenden Drehwinkel und die resultierende Elliptizität auf. Meßergebnisse werden dementsprechend u. U. völlig falsch interpretiert, wenn die Kohärenzfragen nicht zweifelsfrei geklärt sind. Schwierigkeiten treten damit insbesondere dann auf, wenn z. B. in einem Schichtsystem eine Mischung einer kohärenten mit einer inkohärenten Vielfachreflexion auftritt.

Im Rahmen der Schlußbetrachtungen wird auch auf das Meßverfahren der *mo*-Effekte hingewiesen, das sich der „Polarisationsmodulation“ zwischen der rechts- und linkszirkularen Eigenmode der Lichtausbreitung in Materie im longitudinalen Magnetfeld bedient. Die Meßwerte liefern völlig andere Resultate im Vergleich mit der Messung der Intensitäten, die hinter einem Analysator als Funktion seiner Winkelstellung auftreten. Insofern sind auch die erhaltenen summarischen *mo*-Spektren in Transmission und Reflexion verschieden, d. h. sie können nicht unmittelbar verglichen werden. Das kann zu Interpretationsirrtümern führen. Selbstverständlich sind die aus beiden Meßverfahren je getrennt korrekt bestimmten *mo*-Brechungsindizes  $\tilde{n}(+)$  und  $\tilde{n}(-)$  vom gewählten Meßverfahren unabhängig gleich. Problematisch bleibt nur die Festlegung der „Faraday-Drehung“ und der „Faraday-Elliptizität“ in ihrer summarischen(!) Form aufgrund von inkohärenter Vielfachreflexion, d. h. deren Definition

anhand von Intensitätsverhältnissen bzw. Winkelgrößen ohne „Entflechtung“ des Einflusses der inkohärenten Vielfachreflexion. Das Analoge gilt für den *mo*-Effekt in Reflexion, d.h. für den summarischen(!) Kerr-Effekt.

### I. Amplituden- und Intensitätsverhältnisse beim Einzelstrahl

Die Ausbreitung des im allgemeinen Fall elliptisch polarisierten Lichtes wird im vorliegenden magnetooptischen („*mo*“-)Fall zweckmäßigerweise beschrieben mit Hilfe der Überlagerung der beiden zirkularpolarisierten Eigenmoden, die sich parallel zum Magnetfeld in der Probe ausbreiten und jeweils überlagern. Die rechts(„+“-) und links(„-“-)zirkularen Feldstärken  $\vec{E}(+)$  bzw.  $\vec{E}(-)$  schreiben sich dann mit jeweils eigener Amplitude und Phasenverschiebung in der komplexen Form:

$$\begin{aligned}\vec{E}(+, t) &= \vec{E}(+) \cdot e^{i\omega t} = E(+)\cdot e^{i\varphi(+)} \cdot e^{i\omega t} \text{ „rechtszirkular“} \\ \vec{E}(-, t) &= \vec{E}(-) \cdot e^{i\omega t} = E(-)\cdot e^{i\varphi(-)} \cdot e^{i\omega t} \text{ „linkszirkular“}\end{aligned}\quad (1)$$

Werden bei der kohärenten Vielfachreflexion die jeweiligen Modenanteile der Feldstärken getrennt bis zum Endresultat superponiert mit der Konsequenz der Interferenz innerhalb der jeweiligen Mode (vgl. weiter unten), so werden bei der inkohärenten Vielfachreflexion Einzelstrahlanteile in der Strahlungsflußdichte, d.h. in den „Intensitäten“, gebildet und in den Intensitäten addiert. Jeder Einzelstrahl enthält das Quadrat der ihm zukommenden elliptisch polarisierten Feldstärke, d.h. der Superposition der Einzelfeldstärken der ihm zukommenden rechts- und links-zirkularen Mode. Die gemessene Intensität „*F*“ hinter einem linear polarisierenden Analysator ist damit eine Funktion des Winkels „*T*“ zwischen der Analysatororientierung und der großen Halbachse der Feldstärkenellipse:  $F = f(T)$ . Diese Funktion ist das Betragsquadrat der Feldstärkenkomponente in Richtung der Analysatorstellung multipliziert mit dem Faktor *H*:

$$\begin{aligned}F(T) &= H \cdot \left\{ E(+)^2 + E(-)^2 + 2 \cdot E(+)\cdot E(-) \cdot \cos \left[ 2 \left( \frac{\varphi(+)-\varphi(-)}{2} - T \right) \right] \right\} \\ \text{mit } H &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\bar{Z}} \right\},\end{aligned}\quad (2)$$

wobei  $\bar{Z}$  der komplexe Wellenwiderstand des Ausbreitungsmediums am Detektor ist. Der Faktor *H* wird im folgenden zur Vereinfachung gleich Eins gesetzt bzw. in die Normierung der Anfangsstrahlungsflußdichte einbezogen.

Ein Einzelstrahl liefert damit eine „Intensitätscharakteristik“ als Funktion der Analysatorstellung, die in Abb. 1a) für den allgemeinen Fall elliptisch polarisierter Strahlung dargestellt ist. Im Fall linear polarisierter Strahlung ergibt sich [s. Abb. 1b)] die Charakteristik in „Kosinus-Quadrat-Form“ als Funktion des Winkels der Analysatorstellung vom Maximum der Intensität aus gezählt.

Bei einem Einzelstrahl bzw. einer durch Intensitätsüberlagerung (vgl. weiter unten) entstandenen Intensitätsfunktion  $F(T)$  wird im Sinne des stattgefundenen *mo*-Effektes die Charakteristik wie folgt interpretiert:

- a) *mo*-Drehwinkel „ $\Theta$ “: Drehwinkel ist derjenige Winkel  $T(\max)$ , für den  $F(T)$  maximal ist:

$$\begin{aligned} \Theta(\text{inkoh.}) &= T(\max) \text{ für } F(\max) = F(T(\max)) \\ [\text{vgl.: } \Theta(\text{koh.}) &= 0,5 \cdot (\varphi(+) - \varphi(-))]. \end{aligned} \quad (3)$$

- b) *mo*-Elliptizität „ $\epsilon$ “: Gemäß der auf die maximale und minimale Feldstärke von elliptisch polarisiertem Licht bezogenen Definition:

$$\epsilon(\text{koh.}) = \frac{E(+)-E(-)}{E(+)+E(-)} \quad (4)$$

gilt:

$$\epsilon(\text{inkoh.}) = \sqrt{\frac{F(\min)}{F(\max)}}. \quad (5)$$

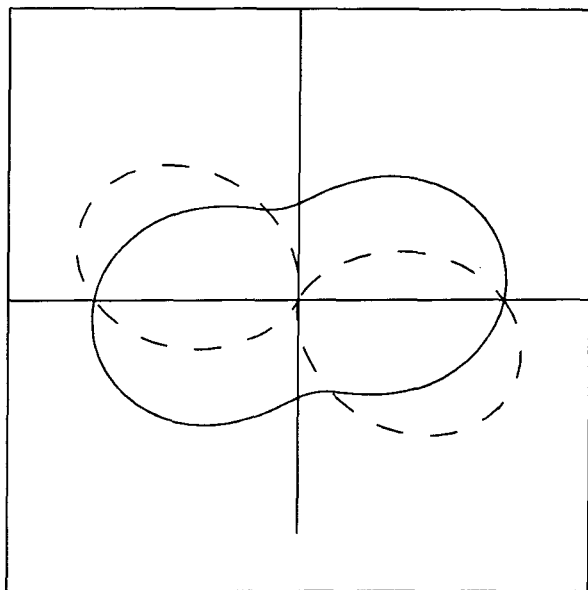


Abb. 1:

Detektierte Strahlungsflußdichte hinter dem Analysator als Funktion seiner Winkelstellung;

Darstellung in Polarkoordinaten:

a) ————— für elliptisch polarisierte Strahlung

b) - - - - - für linear polarisierte Strahlung

Beispielfunktionen mit a)  $E(+): E(-) = 5:1$  und *mo*-Drehwinkel  $\Theta = 20$  Grad;

b)  $E(+): E(-) = 1:1$  und *mo*-Drehwinkel  $\Theta = -40$  Grad.

## II. Amplituden- und Intensitätsverhältnisse bei der Vielfachreflexion

Die vielfachreflektierten Strahlen ergeben sich nach Maßgabe der Wellenamplitudenaufteilung bei der wiederholten Reflexion. Bei dem wiederholten Weg durch die Probe werden die Teilwellen entsprechend der Größe der komplexen Brechungsindizes  $\tilde{n}(+)$  und  $\tilde{n}(-)$  für  $E(+)$  bzw.  $E(-)$  nach Betrag und Phase modifiziert. Dabei wird die Probe selbst als homogen und optisch isotrop vorausgesetzt. Ein komplexer „Volumentransmissionsfaktor“  $\tilde{v}$  ist vom komplexen „optischen Weg“, aber nicht von der Ausbreitungsrichtung abhängig. Ferner treten bei der Reflexion und bei der Transmission an den Grenzflächen Betrags- und Phasenänderungen auf. Die entsprechenden komplexen Grenzflächenreflexions- und Grenzflächen transmissionsfaktoren werden in bekannter Weise berechnet. Dabei sind die vorliegenden Betrachtungen auf senkrechte Inzidenz beschränkt. Diese Faktoren werden jeweils getrennt für die rechts- und die linkszirkuläre Welle unter Verwendung von  $\tilde{n}(+)$  bzw.  $\tilde{n}(-)$  berechnet, wobei in Bezug auf den Durchsatz einer Grenzfläche die dort relevanten Medien einschließlich der Ausbreitungsrichtung zu berücksichtigen sind.

$$\tilde{n} = n - ik$$

$$\tilde{v} = \exp\left(-i \frac{\omega}{c} \cdot \tilde{n} \cdot d\right); d = \text{Plattendicke}$$

$$\tilde{r}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \quad (6)$$

$$\tilde{t}_{1 \rightarrow 2} = 1 + \tilde{r}_{1 \rightarrow 2}.$$

Bei der kohärenten(!) Vielfachreflexion bleiben die Teilkomponenten für die rechts- und linkszirkuläre Polarisation in sich in Bezug auf die Feldamplitude in fester Phasenbeziehung. Erst nach dem Wiederaustritt wird, in Transmission ebenso wie in Reflexion, durch Superposition der beiden zirkulären Teilwellen das resultierende elliptisch polarisierte Wellenfeld gebildet. Der Analysator „filtert“ daraus die auf seine Orientierung projizierte Feldamplitude heraus. Die damit detektierte Funktion der Strahlungsflußdichte  $F(T)$  liefert gemäß Gl. (2) bis Gl. (5) den resultierenden Drehwinkel und die resultierende Elliptizität für die *mo*-Transmission („Faraday-Effekt“) bzw. die *mo*-Reflexion („*mo*-Kerr-Effekt“).

Die Berechnung dieser Verhältnisse mit Hilfe eines Iterationsverfahrens durch Strahlverfolgung wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit ebenfalls numerisch durchgeführt. Man erhält selbstverständlich im Rahmen der vorgegebenen Genauigkeit der Iteration numerisch das gleiche Resultat wie bei der Berechnung nach dem „Matrizenverfahren“ [1]. – Die in Abschnitt IV zum Vergleich mit dem inkohärenten Fall vorgestellten Beispielrechnungen für die *mo*-Spektren bei kohärenter(!) Superposition sind mit diesem kohärenten Iterationsverfahren berechnet.

Bei der inkohärenten(!) Vielfachreflexion werden die Einzelstrahlen jedoch im Sinne eines „inkohärenten Iterationsverfahrens“ als Strahlungsflußdichten gebildet und am Detektor als Einzelintensitäten additiv überlagert und zwar die jeweils einzelne Intensitätskomponente in Bezug auf die Analysatorstellung. Dies entspricht der Strahlüberlagerung „ohne Interferenz“.

Die Behandlung der *mo*-Vielfachreflexion auf der Basis einer Superposition von Strahlungsflußdichten ist in dieser Weise analog der Behandlung der „normalen“, d.h. magnetfeldfreien optischen Transmission bzw. Reflexion bei inkohärenter Vielfachreflexion. Diesbezüglich ist bereits ein „Matrizenverfahren“ zur Berechnung von beliebigen Schichtsystemen bzw. Inhomogenitätsstrukturen entwickelt worden [1], [2]. Dieses Matrizenverfahren stützt sich auf das Lambertsche Gesetz der Intensitätsschwächung im Volumen und auf die Stetigkeitsbedingung der Strahlungsflußdichte in einer Grenzschicht.

Zur Behandlung der Strahlungsflußdichten bei den *mo*-Effekten ist zu bemerken, daß in jedem Einzelstrahl die  $\vec{E}(+)$ -Feldkomponente und die  $\vec{E}(-)$ -Feldkomponente relativ zueinander „in Phase“ bleiben, wie es der tatsächlichen Ausbreitung einer elliptisch(!) polarisierten Strahlung entspricht. Diese phasengerechte Überlagerung führt zu der „Meßfunktion“  $F(T)$  gemäß Gl. (2) für den Einzelstrahl in Abhängigkeit von der Analysatorstellung.

Die Einzelstrahl-Feldstärkenkomponenten  $\vec{E}(+)$  und  $\vec{E}(-)$  werden numerisch iterativ wie folgt gebildet, so daß damit die Einzelstrahl-Funktion  $F(T)$  nach Gl. (2) berechnet werden kann:

a) in Transmission

$$\vec{E}_1(+) = \vec{r}_{1 \rightarrow 2}(+) \cdot \vec{r}_{2 \rightarrow 3}(+) \cdot \vec{v}(+)$$

$$\vec{E}_i(+) = \vec{E}_{i-1}(+) \cdot [\vec{q}(+)]^{(i-1)}; i \geq 2$$

$$\text{mit } \vec{q}(+) = \vec{r}_{2 \rightarrow 1}(+) \cdot \vec{r}_{2 \rightarrow 3}(+) \cdot [\vec{v}(+)]^2 \quad (7)$$

b) in Reflexion

$$\vec{E}_1(+) = \vec{r}_{1 \rightarrow 2}(+)$$

$$\vec{E}_2(+) = \vec{r}_{1 \rightarrow 2}(+) \cdot \vec{r}_{2 \rightarrow 3}(+) \cdot \vec{r}_{2 \rightarrow 3}(+) \cdot [\vec{v}(+)]^2$$

$$\vec{E}_i(+) = \vec{E}_{i-1}(+) \cdot [\vec{q}(+)]^{(i-2)}; i \geq 3.$$

Die Addition zur resultierenden Größe  $F(\text{res.}, T)$  erfolgt nach einem Rekursionskalkül unter Verwendung komplexer Zahlen: Zwei Strahlen „1“ und „2“ ergeben einen Strahl „3“. In Bezug auf die Addition eines weiteren Strahls wird dieser Strahl „3“ zum Strahl „1“ usw.

$$\begin{aligned} D(1+2) &:= [E_1(+)]^2 + [E_1(-)]^2 + [E_2(+)]^2 + [E_2(-)]^2 \\ \delta_{1(2)} &:= [0,5 \cdot (\varphi(+) - \varphi(-))]_{1(2)} \\ \tilde{X}_1 &:= 2 \cdot E_1(+) \cdot E_1(-) e^{i2\delta_1} e^{-i2T} \\ \tilde{X}_2 &:= 2 \cdot E_2(+) \cdot E_2(-) e^{i2\delta_2} e^{-i2T} \\ \tilde{X}_3 &:= \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \\ F(1+2, T) &= D(1+2) + \text{Re} \{ \tilde{X}_3 \cdot e^{-i2T} \}. \end{aligned} \quad (8)$$



Die resultierenden *mo*-Effekte lassen sich nunmehr als „Meßgrößen“ aus der resultierenden „Intensitätscharakteristik“  $F(\text{res.}, T)$  nach den in (4) und (5) gegebenen Zusammenhängen berechnen, denn es ergeben sich unmittelbar analytisch  $T(\text{max})$  sowie  $F(\text{res.}, \text{max})$  und  $F(\text{res.}, \text{min})$ :

$$\begin{aligned}\ominus(\text{inkoh.}, \text{res}) &= 0,5 \cdot \text{ARG}(\tilde{X}_{\text{res}}) \\ \varepsilon(\text{inkoh.}, \text{res}) &= \sqrt{\frac{F(\text{res.}, \text{min})}{F(\text{res.}, \text{max})}} \\ \text{mit: } F(\text{res.}, \text{max}) &= D(\text{res}) + |\tilde{X}_{\text{res}}| \\ F(\text{res.}, \text{min}) &= D(\text{res}) - |\tilde{X}_{\text{res}}|.\end{aligned}\quad (9)$$

Dazu kann bemerkt werden, daß wegen der im Prinzip gleichen Form von  $F(\text{res.}, T)$  als Funktion von  $T$ , verglichen mit der Form  $F(T)$  für elliptisch polarisiertes Licht [vgl. Gl. (2)], die resultierende Charakteristik  $F(\text{res.}, T)$  stets als Intensitätscharakteristik von einem(!) Strahl von elliptisch polarisiertem Licht verstanden werden kann mit den Feldstärken  $E(\text{res.}, +)$  und  $E(\text{res.}, -)$  und deren Phasendifferenz  $\varphi(+) - \varphi(-) = 2 \cdot \delta(\text{res.})$ . Für diese Parameter gilt nach Auflösen der beiden Gleichungen, die gemäß Gl. (2) zwischen  $F(\text{max})$  und  $F(\text{min})$  einerseits und  $\tilde{E}(+)$  und  $\tilde{E}(-)$  andererseits bestehen, damit:

$$\begin{aligned}[E(\text{res.}, +)]^2 + [E(\text{res.}, -)]^2 &= D(\text{res}) \\ E(\text{res.}, +) \cdot E(\text{res.}, -) &= |\tilde{X}_{\text{res}}| \cdot 0,5 \\ \varphi(\text{res.}, +) - \varphi(\text{res.}, -) &= 2 \cdot \delta_{\text{res}} = \text{ARG}(\tilde{X}_{\text{res}}).\end{aligned}\quad (10)$$

Die Berechnung der *mo*-„Meßwerte“ ist damit für die inkohärente Vielfachreflexion streng vollzogen, wenn nur die Glieder der Vielfachreflexionsreihe (vgl. oben) weit genug verfolgt werden. Die Glieder gehen jedoch wegen der rasch wachsenden Betragsschwächung schnell gegen Null. Eine Abbruchbedingung bei der Iteration kann in jedem Fall sicherstellen, daß der rechnerische Fehler der *mo*-Effekte deutlich kleiner ist als jede vernünftige Meßgenauigkeit von Drehwinkel und Elliptizität. Für Meßgenauigkeiten von  $1\text{E-}3$  genügt es in der Regel, wie numerische Rechenbeispiele gezeigt haben, etwa fünf vielfachreflektierte Strahlen zu berücksichtigen.

Das Iterationsverfahren ist damit hinreichend genau und erlaubt die „Vorwärtsberechnung“ der *mo*-Effekte bei bekannten *mo*-Brechungsindizes bzw. eine „Anpassungsrechnung“ beim Vergleich von Theorie und Experiment zur Bestimmung der komplexen *mo*-Brechungsindizes aus Meßdaten.

### III. Inkohärenz und Mittelwertbildung

Die *mo*-Spektren des („resultierenden“) Faraday- oder Kerr-Effektes unterscheiden sich erheblich, wenn entweder das Resultat der Drehung und Elliptizität auf der kohärenten Superposition der Feldstärken oder auf der inkohärenten Superposition von Strahlungsflußdichten als Folge einer Vielfachreflexion basiert. Die Situation könnte verglichen werden mit dem Phänomen der Interferenz beim Lichtdurchtritt

durch eine planparallele Platte und der Überlagerung von vielfachreflektierten Strahlungsflußanteilen ohne Interferenz an dieser Planplatte. Der letztere Fall entspricht, was die durchgelassene Gesamtintensität angeht, einem Mittelwert über die bei der Interferenz auftretenden Phase. Die Mittelung ist die Folge der enthaltenen differenziellen Strahlenteile mit je unterschiedlicher Phase, wobei sich die Variation der Phase nach Voraussetzung der Inkohärenz über ein Vielfaches von 360 Grad erstrecken soll. Die Phase variiert in dieser Weise aufgrund der spektralen Unschärfe der angebotenen Strahlung und/oder der Unschärfe des „optischen Weges“, d. h. des Produktes von geometrischem Weg und reellem Brechungsindex beim Durchgang durch die Platte.

Im Gegensatz dazu stellen die *mo*-Effekte bei inkohärenter Strahlüberlagerung nicht(!) die Mittelwerte der spektralen Oszillationen der kohärenten *mo*-Effekte dar. Dies wird, ebenso wie bei der normalen Interferenzoptik, am deutlichsten, wenn man die einfachsten spektralen Strukturen ins Auge faßt. Bei einem zirkulardichroitischen Material, also bei unterschiedlichem Absorptionskoeffizienten für den rechts- und links-zirkularen Polarisationszustand der Strahlung, aber spektraler Unabhängigkeit der komplexen Brechungsindizes  $\tilde{n}(+)$  und  $\tilde{n}(-)$ , um ein Beispiel anzuführen, oszilliert die Faraday-Elliptizität als Funktion der Wellenlänge im kohärenten Fall um den Wert Null. Die Faraday-Elliptizität im inkohärenten Fall ist dabei jedoch nicht Null, sondern ist spektral etwa konstant von der Größe der maximalen kohärenten Faraday-Elliptizität.

Analoges gilt für die Kerr-Elliptizität. – Andererseits kann aber auch die Drehung im inkohärenten Fall kleiner erscheinen, als es dem kohärenten Fall entspricht.

Der im folgenden Abschnitt numerisch ausgeführte Vergleich soll diese Feststellungen quantitativ an zwei Beispielen, und zwar an einer Planplatte mit a) spektral konstanten *mo*-Brechungsindizes und b) *mo*-Brechungsindizes mit spektraler Abhängigkeit entsprechend einem „Oszillatormodell“ für die komplexe Dielektrizitätskonstante, belegen.

Es muß demnach beachtet werden, daß die Beurteilung der *mo*-Verhältnisse anhand experimentell bestimmter Effekt-Spektren erheblich erschwert ist und nicht einmal der Einschätzung von Mittelwerten der *mo*-Dispersionsverhältnisse dienen kann, solange nicht bekannt ist, ob eine kohärente oder inkohärente Superposition wirksam ist. Eine Unterscheidung kann auch nicht aus der Vermessung einer „Intensitätscharakteristik“ als Funktion der Winkelstellung des Analysators abgeleitet werden, da, wie oben dargestellt, die Intensitätscharakteristik in beiden(!) Fällen der von einem(!) elliptisch polarisierten Lichtstrahl entspricht.

Es erscheint nützlich, sich diese Inkongruenz von spektraler Mittelwertbildung und Inkohärenz, d. h. die beim Wechsel von Kohärenz zu Inkohärenz auftretende „Verfremdung“ der *mo*-Effekte, am Beispiel der entsprechenden Überlagerung von nur zwei(!) Teilstrahlen klarzumachen.

Nimmt man zur Verdeutlichung an, daß die beiden Absorptionsindizes  $k(+)$  und  $k(-)$  beide gleich Null und die beiden reellen Brechungsindizes  $n(+)$  und  $n(-)$  nicht sehr verschieden sind, so liegt kein Zirkulardichroismus vor und die Beträge der Reflexions- und Transmissionsfaktoren sind nahezu gleich. Im kohärenten Fall bleiben dann

die Teilstrahlen nahezu linear polarisiert. Die kohärente Summe dieser zwei Teilstrahlen führt dann wieder zu nahezu linear polarisiertem Licht, dessen Schwingungsrichtung jedoch entsprechend der optischen Wegdifferenz in der Platte gedreht ist:

$$\begin{aligned}
 \text{Für} \quad & \bar{n}(+) = 3,49, \quad \bar{n}(-) = 3,51, \\
 & \lambda = 1,0 \, \mu\text{m} \text{ und } d = 12,5 \, \mu\text{m} \\
 \text{gilt:} \quad & \left. \begin{aligned} \tilde{E}_1(+) &= 0,692 \exp(i \cdot \varphi(+)) \\ \tilde{E}_1(-) &= 0,690 \exp(-i \cdot \varphi(-)) \end{aligned} \right\} \text{1. Strahl} \\
 & \left. \begin{aligned} \tilde{E}_2(+) &= 0,2132 \exp(i \cdot 3 \cdot \varphi(+)) \\ \tilde{E}_2(-) &= 0,2140 \exp(-i \cdot 3 \cdot \varphi(-)) \end{aligned} \right\} \text{2. Strahl} \\
 \text{mit:} \quad & \varphi(+) = 15\,705,0 \text{ Grad} \\
 & \varphi(-) = 15\,795,0 \text{ Grad} \\
 \text{Resultat: } & \ominus(\text{koh.,res}) = -27,823 \text{ Grad}; \quad \varepsilon(\text{koh.,res}) = 1,1614 \cdot 10^{-3}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Im Fall der inkohärenten Addition der beiden Teilstrahlen überlagern sich die beiden Intensitätscharakteristika und man erhält die folgenden resultierenden, d.h. als Meßresultat auftretenden *mo*-Effekte:

$$\begin{aligned}
 \text{Resultat aus (11):} \\
 \ominus(\text{koh.,res}) = -45 \text{ Grad}; \quad \varepsilon(\text{koh.,res}) = 0,6788.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Die Zahlenwerte für die Brechungsindizes und die Schichtdicke sind hier so gewählt, daß das Beispiel relativ kraß ist. Das ist z.B. dann der Fall, wenn wie hier die Drehung der beiden Teilstrahlen eine Differenz von 90 Grad aufweist.

Der Vergleich der in der Messung auftretenden Drehwinkel- und Elliptizitätswerte zeigt den dramatischen Unterschied: Gegenüber dem kohärenten Fall liefert die Überlagerung im inkohärenten Fall eine praktisch gegenüber dem ersten Strahl nicht geänderte Drehung, jedoch eine erhebliche Elliptizität, die fast der Wurzel des Verhältnisses der Maximalwerte der beiden Intensitätscharakteristika der beiden Teilstrahlen entspricht. Die Abb. 2 zeigt dazu diese Überlagerung und läßt erkennen, wie die große Elliptizität nur dadurch entsteht, daß der zweite Teilstrahl eine Drehung hat, die sein Intensitätsmaximum als Funktion der Analysatorstellung in das entsprechende Minimum des ersten Teilstrahles fallen läßt.

#### IV. Numerische Beispiele

Die folgenden Ausführungen präsentieren zwei numerische Beispiele, die sich beide auf die *mo*-Spektren in Transmission und Reflexion einer Planplatte bei senkrechter Inzidenz beziehen. Die *mo*-Transmissionsspektren sind dabei die resultierenden Spektren der „Faraday-Drehung“ und der „Faraday-Elliptizität“. Die *mo*-Reflexionsspektren sind entsprechend die resultierenden Spektren der „*mo*-Kerr-Drehung“ und der „*mo*-Kerr-Elliptizität“. In jedem Fall werden zwei Spektren simultan dargestellt: das Spektrum in kohärenter und inkohärenter Rechnung. Im ersten Fall, d.h. für die kohärente Rechnung, findet ein diesbezügliches Iterationsverfahren Anwendung, das

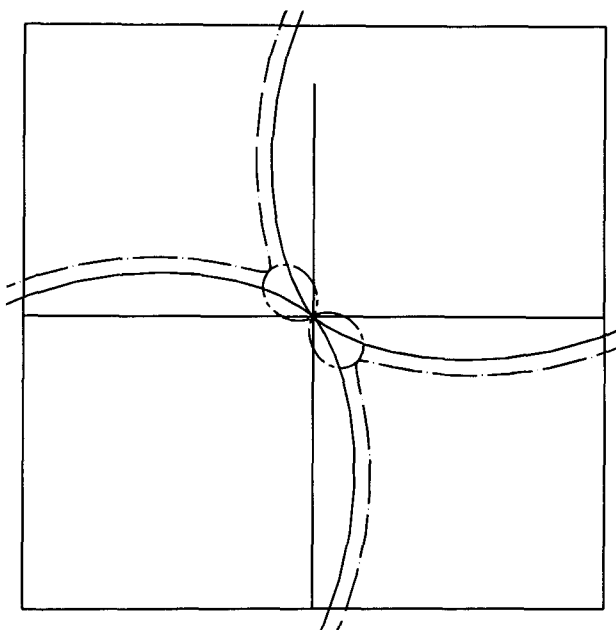


Abb. 2:

*Inkohärente Überlagerung von zwei linear polarisierten Teilstrahlen bei der Vielfachreflexion:*

— für den ersten Strahl mit  $E(+)=E(-)=0.955$  und  $mo$ -Drehwinkel  $\Theta = -90$  Grad; — — — — für den zweiten Strahl mit  $E(+)=E(-)=0.09125$  und  $mo$ -Drehwinkel  $\Theta = -270$  Grad; - - - - - für die resultierende Strahlungsflußdichte, die der von elliptisch polarisiertem Licht entspricht. Auftragung gemäß Abb. 1, vergrößerter zentraler Ausschnitt. — Zur näheren Erläuterung siehe Text.

die gleichen Resultate liefert, wie das „kohärente Matrizenverfahren“ [3] (vgl. die Bemerkungen oben in Kapitel II). Den Berechnungen zum Fall der inkohärenten Vielfachreflexion liegt das hier vorgestellte Iterationsverfahren zugrunde.

Der Beispielfall „A“ bezieht sich auf den Fall spektral konstanter  $mo$ -Brechungsindizes, während sich der Beispielfall „B“ auf ein „Oszillatormodell“ für die Berechnung der Spektralfunktion der  $mo$ -Brechungsindizes stützt. In beiden Fällen wurde der Spektralbereich von  $1.05\ \mu\text{m}$  bis  $1.08\ \mu\text{m}$  gewählt, und in beiden Fällen beträgt die numerische spektrale Auflösung  $\Delta\lambda = 0.0005\ \mu\text{m}$ . Der Spektralbereich liegt für das Oszillatormodell so, daß in Relation zu der bei  $1.1\ \mu\text{m}$  liegenden Resonanzwellenlänge ein charakteristischer Dispersionsbereich überdeckt wird, in dem die Absorption zunächst relativ schwach ist, dann aber mit wachsender Wellenlänge so stark einsetzt, daß im Faraday-Effekt nur noch der erste transmittierte Strahl relevant ist. Damit verschwindet der Unterschied zwischen dem kohärenten und inkohärenten Überlagerungsfall und die Spektren gehen asymptotisch ineinander über. Analoges gilt für den

*mo*-Kerr-Effekt in Reflexion, der dann praktisch nur mehr von dem einmaligen Reflexionsvorgang bestimmt ist.

Die *mo*--Dispersionsaufspaltung ist in beiden Fällen willkürlich vorgegeben. Im Fall „B“ entspricht sie einer *mo*-Aufspaltung der Resonanzfrequenz im Sinne eines festen Landé-Faktors.

Sowohl für den Fall „A“ als auch für den Fall „B“ sind im Wellenlängenabstand von .002  $\mu\text{m}$  die berechneten Werte der *mo*-Effekte als Zahlenwerte tabellarisch angegeben, um einen quantitativen Vergleich mit Berechnungen an anderer Stelle zu ermöglichen.

#### Fall „A“

Die Plattendicke beträgt 5  $\mu\text{m}$ .

Die Brechungsindizes lauten:  $n(+) = (3.49, -i \cdot .002)$

$n(-) = (3.51, -i \cdot .003)$ .

Die Abb. 3a) bis 3d) geben die Spektren wieder. Dabei werden die folgenden Abkürzungen verwandt:

„FD“ = res. Faraday-Drehung

„FE“ = res. Faraday-Elliptizität

„KD“ = res. *mo*-Kerr-Drehung

„KE“ = res. *mo*-Kerr-Elliptizität.

#### Fall „B“

Die Plattendicke beträgt 5  $\mu\text{m}$ .

Die *mo*-Brechungsindizes werden nach folgender Formel mit den angegebenen Parametern berechnet, wobei im Sinne der Maxwellschen Relation die komplexe relative magnetische Permeabilität  $\tilde{\mu}_{\text{rel}} = 1$  gesetzt ist:

$$\tilde{\epsilon}_{\text{rel}}(\pm) = 13,25 + \frac{5 \cdot 10^{29}}{(\omega_0 \pm 1 \cdot 10^{-4} \cdot \omega_0)^2 - \omega^2 + i\omega/\tau}$$

mit  $\omega_0 = 2\pi \cdot c / 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$\tau = 1 \cdot 10^{-13} \text{ s}$

(13)

daraus  $\tilde{n}(\pm) = \sqrt{\tilde{\epsilon}_{\text{rel}}(\pm)}$  da  $\tilde{\mu}_{\text{rel}} = 1$ .

Die Abb. 4a) bis 4d) geben die Resultate wieder, wobei die gleichen Abkürzungen wie unter „A“ zur Kennzeichnung der Spektren verwendet werden.

Tab. 1 Zahlenwerte zu Abb. 3: Für die Teilstrahlüberlagerung  
a) kohärent b) inkohärent.

$\lambda/\mu\text{m}$	FD	FE	KD	KE
1.05	11.9826408939	-.114632053438	10.7317410305	.068389815446
1.052	14.0470038695	-.148723634447	12.4265743305	.130290611745
1.054	17.164549293	-.171762647866	14.40770924	.248950755518
1.056	21.2109434345	-.169701591898	13.510491294	.496891107937
1.058	25.2290727085	-.129096162363	-33.118168849	.701202694185
1.06	27.606643754	-5.07392410652E-2	-48.8087608545	.149028565619
1.062	27.124701591	3.97764283029E-2	-44.817215004	-.361146228715
1.064	24.128146056	.107254358539	-7.6146131005	-.662876473201
1.066	20.1267907615	.136072456895	11.386285944	-.387576297068
1.068	16.434194132	.132294649964	11.976448731	-.21220301497
1.07	13.643320904	.10905094887	10.765066096	-.121157314313
1.072	11.750087668	7.74602459112E-2	9.663167491	-7.02096665919E-2
1.074	10.5529115205	4.22839688071E-2	8.9339041445	-3.86041952503E-2
1.076	9.9592420825	5.6744266193E-3	8.6243631245	-1.59657608114E-2
1.078	9.868342984	-3.08138976574E-2	8.703538978	4.20626237869E-3
1.08	10.2622350175	-6.75500324988E-2	9.1804810325	2.62319008207E-2

Tab. 1a)

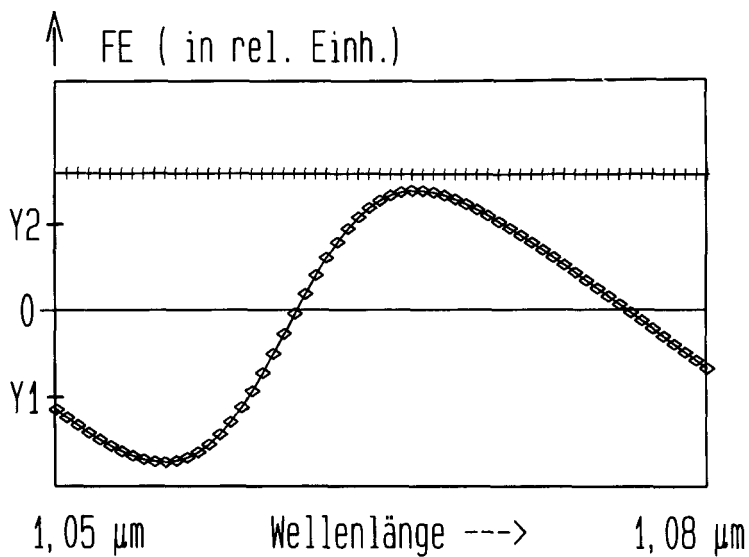
$\lambda/\mu\text{m}$	FD	FE	KD	KE
1.05	19.0689264012	.158412628992	8.66410689705	.293939169245
1.052	19.0360327055	.158209220702	8.65780646355	.293474420534
1.054	19.0032525727	.158006213072	8.65148633625	.293011021409
1.056	18.970585451	.157803606153	8.64514691105	.292548967696
1.058	18.9380306974	.157601399234	8.6387885479	.29208825374
1.06	18.9055877268	.157399592121	8.6324116197	.291628874784
1.062	18.8732559837	.157198184629	8.6260165022	.291170826451
1.064	18.8410348501	.156997176218	8.61960354505	.290714103338
1.066	18.8089237688	.156796566601	8.61317311105	.290258700939
1.068	18.7769221794	.156596355608	8.6067255564	.289804614623
1.07	18.7450294928	.156396542669	8.60026122125	.289351839272
1.072	18.7132451751	.156197127647	8.5937804594	.288900370621
1.074	18.6815686048	.155998109733	8.5872835886	.288450202937
1.076	18.6499992768	.155799488868	8.5807709594	.288001332246
1.078	18.6185366273	.155601264603	8.57424289785	.287553753648
1.08	18.5871801188	.155403436592	8.5676997328	.287107462593

Tab. 1b)

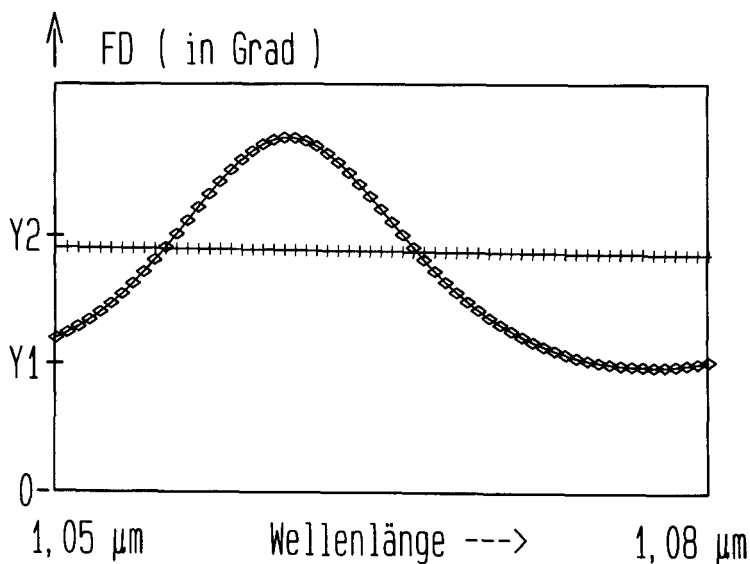
Abb. 3:

Magnetooptische Spektren einer Planplatte der Dicke  $5\text{ }\mu\text{m}$  im Vakuum.  
 Die mo-Brechungsindizes betragen:  $n(+)=3.49-i\cdot 0.002$ ,  $n(-)=3.51-i\cdot 0.003$  ohne Dispersion.

—◇— für kohärente, +++++ für inkohärente Teilstrahlüberlagerung



a) Faraday-Drehung („FD“), Skalierungswerte:  $Y1=10$  (Grad);  $Y2=20$  (Grad)



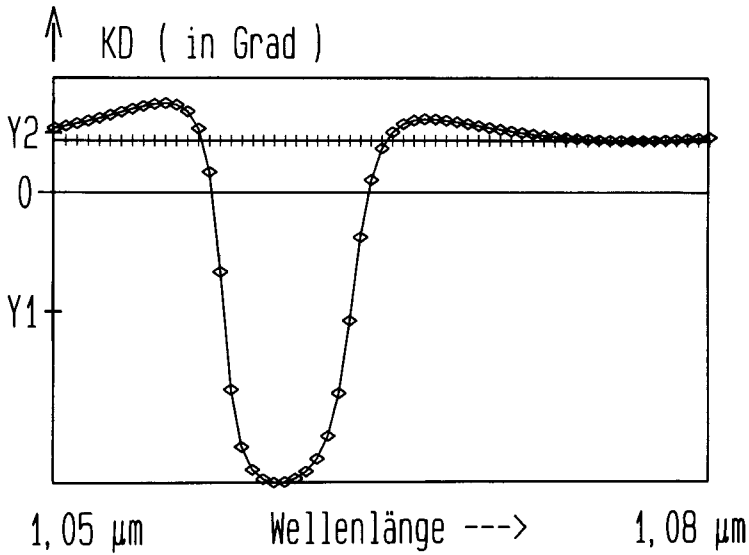
b) Faraday-Elliptizität („FE“), Skalierungswerte:  $Y1=-0,1$ ;  $Y2=0,1$

Abb. 3:

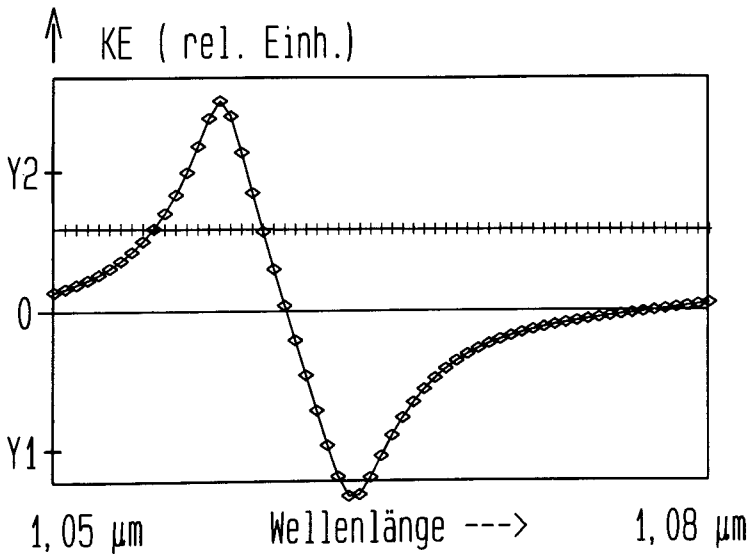
Magnetooptische Spektren einer Planplatte der Dicke  $5\text{ }\mu\text{m}$  im Vakuum.

Die mo-Brechungsindizes betragen:  $n(+)=3,49-i\cdot 0,002$ ,  $n(-)=3,51-i\cdot 0,003$  ohne Dispersion.

—◇— für kohärente, +++++ für inkohärente Teilstrahlüberlagerung



c) mo-Kerr-Drehung („KD“), Skalierungswerte:  $Y1=-20\text{ (Grad)}$ ;  $Y2=10\text{ (Grad)}$



d) mo-Kerr-Elliptizität („KE“), Skalierungswerte:  $Y1=-0,5$ ;  $Y2=0,5$



Tab. 2 Zahlenwerte zu Abb. 4: Für die Teilstrahlüberlagerung  
a) kohärent b) inkohärent.

$\lambda/\mu\text{m}$	FD	FE	KD	KE
1.05	.825844541	-1.20856536612E-3	.2352193975	5.42661414454E-3
1.052	1.121201038	-6.05021500244E-4	-.2386116065	1.02213763675E-2
1.054	1.271178436	3.97316593807E-3	-.6736614485	-6.18818775758E-3
1.056	1.163916114	6.49956710455E-3	.169786815	-7.76080359352E-3
1.058	1.1298844945	4.27393547804E-3	.346845118	-1.01366005956E-3
1.06	1.3475591515	1.53200590843E-3	.240771887	5.06793191226E-3
1.062	1.745784469	2.90708454385E-3	-.3326559495	6.39051765958E-3
1.064	1.897651931	7.93556597003E-3	-.2081226725	-6.46843529972E-3
1.066	1.9551674745	8.06280151596E-3	.275731602	-1.79565559034E-3
1.068	2.3059698625	.00650691729	.066922778	4.87540935817E-3
1.07	2.745543525	1.08775039931E-2	-.2329554735	-1.16551106412E-3
1.072	3.0302752835	1.35473098974E-2	.1407326425	-7.50355663037E-4
1.074	3.6331010775	1.60699694866E-2	-.07229901	2.0899940873E-3
1.076	4.2646531125	.022044696667	.0199731655	-3.68035940358E-4
1.078	5.14022794	2.88547246159E-2	-.040155828	1.04484544693E-3
1.08	6.25878991	3.98153511372E-2	-.0160006115	9.81905486188E-4

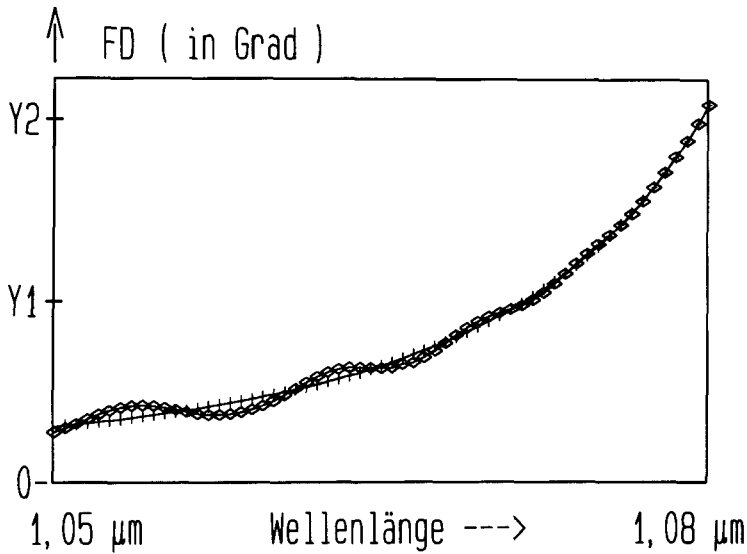
Tab. 2a)

$\lambda/\mu\text{m}$	FD	FE	KD	KE
1.05	.91767153097	4.13343014493E-3	.122670704802	8.09813769183E-3
1.052	.997570573385	4.26001051286E-3	.113484247533	8.1770190571E-3
1.054	1.08866341471	4.40668537835E-3	.102777926021	8.18740821831E-3
1.056	1.19317993501	4.58862338457E-3	9.06786804065E-2	8.11187536684E-3
1.058	1.3139152494	4.82929654878E-3	7.74346910525E-2	7.93063003877E-3
1.06	1.45440058156	5.16324725621E-3	.063463698605	7.62708045096E-3
1.062	1.61913577908	5.63860116661E-3	4.93050219691E-2	7.18275116083E-3
1.064	1.81391076503	6.31883582901E-3	3.56286899957E-2	6.58635089075E-3
1.066	2.04625965358	7.28438088091E-3	2.31455366777E-2	5.83689350772E-3
1.068	2.3261159365	8.63616497824E-3	1.24765923992E-2	4.9497964287E-3
1.07	2.66680111044	1.05087261403E-2	3.98235858434E-3	3.96363800623E-3
1.072	3.08648643518	1.30895243302E-2	-.0024035455	2.94608452841E-3
1.074	3.6105156316	.016665884377	-.0072648005	1.99739708468E-3
1.076	4.27502124476	2.17004041668E-2	-.011662507	1.25439667309E-3
1.078	5.13268195515	2.89699509031E-2	-.0170209515	8.89154832655E-4
1.08	6.2618787637	3.98317823877E-2	-.025191801	9.36589081627E-4

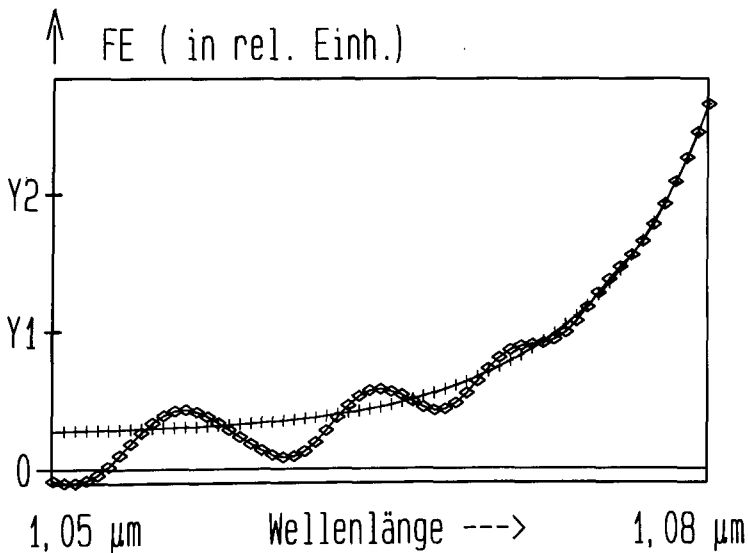
Tab. 2b)

Abb. 4:

Magnetooptische Spektren einer Planplatte der Dicke  $5\text{ }\mu\text{m}$  im Vakuum.  
 Die mo-Brechungsindizes entsprechen einem optischen Resonator mit Aufspaltung der Resonanzfrequenz im Magnetfeld [vgl. die Angaben in Gl. (13)]; Resonanzwellenlänge ( $B=0$ )  $\lambda_0 = 1,1\text{ }\mu\text{m}$ .  
 —◇— für kohärente, +++ für inkohärente Teilstrahlüberlagerung



a) Faraday-Drehung („FD“), Skalierungswerte:  $Y1=3\text{ (Grad)}$ ;  $Y2=6\text{ (Grad)}$

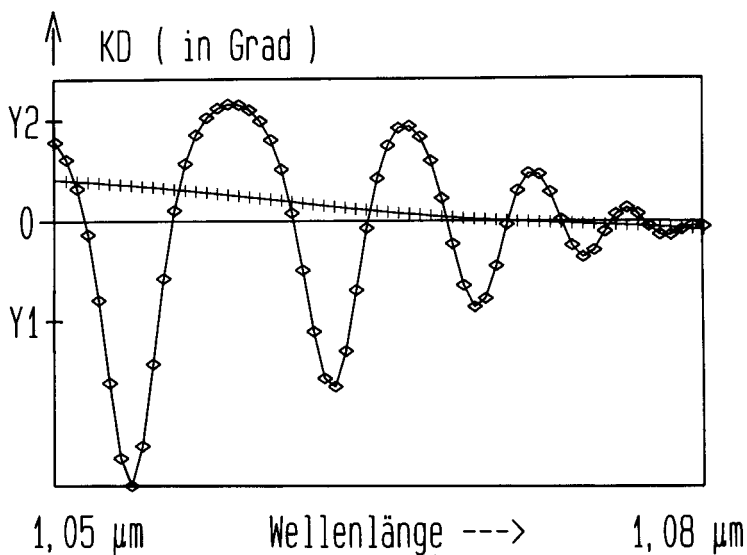


b) Faraday-Elliptizität („FE“), Skalierungswerte:  $Y1=1,5 \cdot 10^{-2}$ ;  $Y2=3 \cdot 10^{-2}$

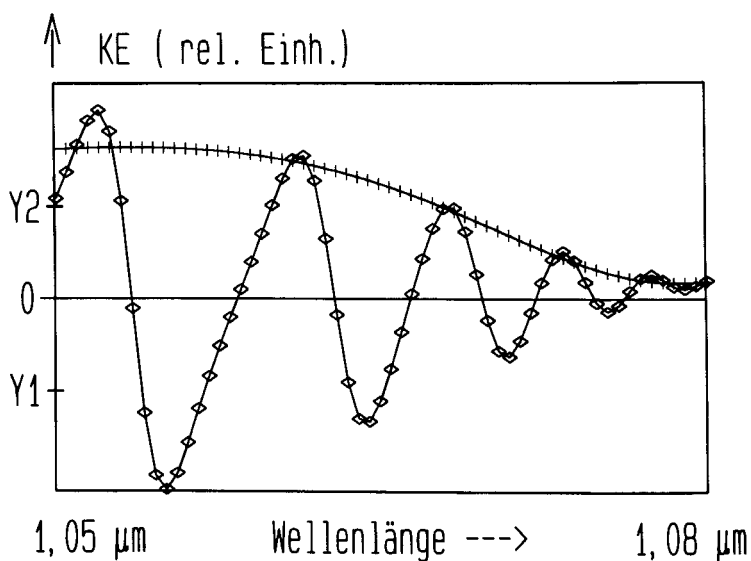
Abb. 4:

Magnetooptische Spektren einer Planplatte der Dicke  $5\text{ }\mu\text{m}$  im Vakuum.  
Die mo-Brechungsindizes entsprechen einem optischen Resonator mit Aufspaltung der Resonanzfrequenz im Magnetfeld [vgl. die Angaben in Gl. (13)]; Resonanzwellenlänge ( $B=0$ )  $\lambda_0=1,1\text{ }\mu\text{m}$ .

—◇— für kohärente, +++++ für inkohärente Teilstrahlüberlagerung



c) mo-Kerr-Drehung („KD“), Skalierungswerte:  $Y1=-0,3\text{ (Grad)}$ ;  $Y2=0,3\text{ (Grad)}$



d) mo-Kerr-Elliptizität („KE“), Skalierungswerte:  $Y1=-5 \cdot 10^{-3}$ ;  $Y2=5 \cdot 10^{-3}$

## V. Schlußbetrachtungen

Die Berechnung bzw. Analyse der *mo*-Effekte in der Form des komplexen „resultierenden Faraday-Effektes“ (in Transmission) und des komplexen „resultierenden *mo*-Kerr-Effektes“ (in Reflexion) setzt die Kenntnis voraus, ob und in welcher Weise in der Probe eine Vielfachreflexion stattgefunden hat. Entscheidend ist dabei zu wissen, ob die Überlagerung der Wellenanteile kohärent oder inkohärent erfolgt. Die kohärente Überlagerung kann exakt mit Hilfe eines Matrixformalismus erfaßt werden [3]. In Bezug auf die inkohärente Überlagerung liegen Ansätze vor [4], [5], [6], auch hier einen Matrixformalismus zu entwickeln, jedoch widersprechen sich die Ansätze teilweise und andererseits wird der wahre Sachverhalt noch nicht richtig wiedergegeben.

Basis einer derartigen Beurteilung bildet das hier vorgestellte „Iterationsverfahren“. Es beruht auf einer korrekten Überlagerung von Strahlungsflußdichteanteilen, die bei der Strahlaufteilung durch Vielfachreflexion entstehen. Damit wird die „wahre“ Situation in Bezug auf die zu messenden Drehwinkel und Elliptizitäten erfaßt. Damit liefert das Iterationsverfahren ein Entscheidungskriterium, ob ein Matrixverfahren Gleiches leistet. Die Kenntnis der Entstehung der inkohärenten *mo*-Effekte kann auch ein heuristisches Hilfsmittel sein, ein geeignetes Matrixverfahren zu finden.

Eine früher erschienene Arbeit [7] kann hier nicht hilfreich sein, da sie zwar die Vielfachreflexion in Bezug auf den „Volumeneffekt“ durch Reihendarstellung berücksichtigt, die *mo*-Grenzflächeneffekte jedoch völlig außer Betracht läßt. Insofern ist das dort angeführte Endresultat falsch.

Die vorliegende Arbeit stellt ein iteratives Überlagerungsverfahren vor, bei dem die „Intensitätscharakteristik“ als Funktion des Drehwinkels des Analysators für jeden Teilstrahl der Vielfachreflexion analytisch streng berücksichtigt wird. Der Abbruch der Iteration kann in jedem Fall so spät erfolgen, daß das Endresultat genauer ist als jede praktikable Messung von Drehwinkel bzw. Elliptizität. Insofern ist das Verfahren hinreichend genau.

Man gewinnt die Einsicht, daß die inkohärente Vielfachreflexion im Vergleich zum Resultat bei kohärenter Vielfachreflexion zu einer „Verfremdung“ der *mo*-Effekte bzw. Spektren führt, die einer „unmittelbaren“ Interpretation und einer numerischen Analyse in Richtung der Bestimmung der inhärenten komplexen *mo*-Brechungsindizes im Wege steht.

Das vorliegende Iterationsverfahren wird auf zwei Beispiele angewandt, in denen die *mo*-Spektren bei kohärenter und inkohärenter Überlagerung der vielfachreflektierten Teile vergleichend gegenübergestellt sind. Damit wird nicht nur das Verfahren erläutert, sondern gerade auch die „Verfremdung“ als Folge der nicht interferenzfähigen Überlagerung deutlich.

Das vorgestellte Verfahren ist auch für eine numerische Anpassungsprozedur geeignet, um aus experimentell bestimmten *mo*-Effekten bzw. Spektren die *mo*-Brechungsindizes zu bestimmen, denn die Iteration konvergiert relativ rasch, so daß der Rechenaufwand vertretbar bleibt. Das Verfahren dürfte damit für die analytische Arbeit am Experiment und zur Entwicklung eines geeigneten Matrizenverfahrens ein wichtiges Hilfsmittel sein.

Das vorliegende Iterationsverfahren erlaubt es auch, eine(!) Schicht mit inkohärenter Vielfachreflexion mit einem Schichtsystem mit ausschließlich kohärenter Vielfachreflexion zu kombinieren. Dies entspricht z.B. dem häufig vorkommenden Fall, daß sich dünne *mo*-wirksame Schichten (etwa Aufdampfschichten) auf einem relativ dicken Substrat als Träger befinden, in dem selbst eine nicht interferenzfähige Superposition stattfindet. In diesem Fall wird mit Hilfe des Matrizenverfahrens der kohärenten Superposition eine einzige Grenzschichtsmatrix berechnet, die als „Stellvertretermatrix“ das kohärente Schichtsystem repräsentiert. Dieser Grenzschichtsmatrix sind in bekannter Weise (vgl. z.B. [2]) die für das Iterationsverfahren benötigten komplexen Reflexions- und Transmissionsfaktoren [vgl. Gl. (6)] für diese „Grenzschicht mit aufgesetztem kohärenten Schichtsystem“ zu entnehmen.

Speziell das magnetooptische Verhalten von dünnen Aufdampfschichten auf magnetooptisch indifferenten dielektrischen oder metallischen Substraten ist Gegenstand jüngerer Untersuchungen gewesen (z.B. [8], [9]), wobei teilweise *mo*-„Verstärkungseffekte“ konstatiert wurden und zu besonderen Modellen einer neuartigen mikroskopischen Wechselwirkung geführt haben. Tatsächlich lassen sich diese „enhancement“-Erscheinungen wohl häufig allein auf die optische Vielfachreflexion im Schichtsystem zurückführen (z.B. [10]), wenn die Überlagerung nur korrekt berücksichtigt wird.

Das Iterationsverfahren erscheint jedoch kaum praktikabel zur Anwendung auf ein Schichtsystem, in dem zwei oder mehr Schichten mit inkohärenter Vielfachreflexion vorhanden sind, wenn dies auch im Prinzip möglich ist und von leistungsfähigen Computern zu bewältigen wäre. Deshalb muß es letztlich das Ziel sein, auch für die inkohärente Superposition von Teilstrahlen in Schichten bzw. Schichtsystemen ein Matrizenverfahren zu entwickeln. Die vorliegende Arbeit soll zur Findung und Prüfung derartiger Matrixverfahren beitragen. Es ist geplant, die entsprechenden Ergebnisse in einem „Teil 2: Matrizenverfahren“ unter ansonsten gleichem Titel zu veröffentlichen.

Das hier vorgestellte Verfahren erlaubt es bereits jetzt, in praktisch wichtigen Fällen, die resultierenden magnetooptischen Effekte in Transmission („Faraday-Effekt“) und Reflexion („*mo*-Kerr-Effekt“) in Bezug auf Drehung der Polarisationsrichtung und Elliptizität beim Vorhandensein inkohärenter Vielfachreflexion richtig zu berechnen bzw. diesbezügliche Experimente zu analysieren.

Abschließend ist noch auf die Unterschiede hinzuweisen, die sich aus der Anwendung verschiedener Meßverfahren für die *mo*-Effekte ergeben. Die vorliegenden Ausführungen beziehen sich auf die Messung der von einem Analysator durchgelassenen Strahlungsintensität. Der Polarisationszustand des Lichtes wird, wie im allgemeinen üblich, bestimmt aus der Funktion der registrierten Intensität als Funktion des Stellungswinkels des Analysators. Der „Drehwinkel“ ergibt sich dabei unmittelbar als Differenz des Stellungswinkels zum Maximum der Intensität mit und ohne Magnetfeld. Die „Elliptizität“ ist die Wurzel aus dem Intensitätsverhältnis des Minimums der detektierten Intensität zum Maximum, wenn ein Stellwinkel von 180 Grad (oder größer) durchfahren wird [vgl. Gl. (5)].

Andere Meßverfahren basieren auf anderen Relationen und werten die detektierten Signale anders aus (vgl. z.B. die Ausführungen und Literaturhinweise in [11]).

Insbesondere ist diesbezüglich auf das Verfahren der „Polarisationsmodulation“ hinzuweisen, bei dem periodisch zwischen der Einstrahlung von rechts- und linkszirkular polarisiertem Licht gewechselt wird. Da das Licht jeweils nur aus einer „Eigenmode“ für die Materie im longitudinalen Magnetfeld besteht, ist das in lock-in-Technik detektierte Intensitätssignal unmittelbar proportional zur Differenz der Quadrate der jeweiligen Feldstärkeamplituden. Die „Elliptizität“ ist damit sehr empfindlich unmittelbar zugänglich, denn durch reine Intensitätsmodulation für jede Polarisationsrichtung getrennt kann die entsprechende Normierung erfolgen. Der „Drehwinkel“ wird in diesem Fall unter Einschaltung eines optischen Komparators bestimmt. Der Drehwinkel läßt sich aber auch direkter messen, wenn eine primäre Modulation zwischen zwei linear-polarisierten Zuständen mit orthogonaler Schwingungsrichtung erfolgt.

Während bei der kohärenten Vielfachreflexion die Auswertungsergebnisse bezüglich der summarischen komplexen *mo*-Effekte unabhängig sind vom gewählten Meßverfahren, ist dies in Gegenwart inkohärenter Vielfachreflexion nicht der Fall. Die wird gerade bei der Bestimmung der Elliptizität nach dem hier verwendeten Verfahren im Vergleich zu der Anwendung der Polarisationsmodulation deutlich. Hier wird die resultierende, d.h. gemessene Elliptizität durch die Drehung eines Teilstrahls beeinflusst, dort tritt eine derartige „Wechselwirkung“ gar nicht auf.

Auf die Möglichkeiten, die inkohärente Überlagerung von (ganz- und/oder teil-) polarisierten Strahlen mit Hilfe des sogenannten „Stokes-Vektors“ rechnerisch zu vollziehen [12], soll hier nur hingewiesen werden. – Nähere Ausführungen dazu sind im „– Teil II –“ dieses Artikels vorgesehen, der sich generell mit der Anwendung von Matrizenverfahren zu Berechnung der *mo*-Effekte bei inkohärenter Vielfachreflexion beschäftigen wird.

### Literaturverzeichnis

- [1] B. Harbeke, Appl. Phys., B **39** (1986), 165.
- [2] a) F.R. Keßler, Festkörperprobleme XXVI. Herausgeber: P. Grosse, Vieweg-Verlag, Braunschweig 1986, 277–308.  
b) F.R. Keßler, Abhandl. Braunschweig. Wiss. Ges. **38** (1986), 203–207.
- [3] a) D.O. Smith, Optica Acta **12** (1965), 13–45.  
b) R. Nies and F.R. Keßler, Phys. Stat. Sol. (a) **111** (1989), 639–654.
- [4] R. Nies, Wiss. Ber. HMFA Braunschweig, ISSN 0723-9459, Folge **12A** (1991/92).
- [5] B. Sievers, Diplomarbeit, TU Braunschweig 1991/92.
- [6] J. Brübach, Diplomarbeit, TU Braunschweig 1991/92.
- [7] H. Piller, J. Appl. Phys. **37** (1966), 763–767.
- [8] T. Katayama, Y. Suzuki, H. Awano, Y. Nishihara and N. Koshizuka, Phys. Rev. Letters **60** (1988), 1426–1429.
- [9] L.-Y. Chen, W.A. McGahan, Z.S. Shan, D.J. Sellmeyer and J.A. Woolam, J. Appl. Phys. **67** (1990), 7547–7555.
- [10] R. Nies and F.R. Keßler, Phys. Rev. Letters **64** (1990), 105

- [11] F.R. Keßler and J. Metzdorf, Interband Effects and Faraday Rotation, Chapter 11, 579–675, in: G. Landwehr and E.I. Rashba (Editors), Landau Level Spectroscopy, Elsevier Sci. Publ. B.V., Amsterdam 1991.
- [12] a) W.A. Shurcliff, Polarized Light: Production and Use. Harvard Univ. Press., Cambridge/Mass., 1962.  
b) W.A. Shurcliff and S.S. Ballard, Polarized Light. D. van Nostrand Co., Inc., Princeton/N.J., 1964.